PART2 1 の n 乗根

要点整理と公式

要点 ① 1 の n 乗根

1 の 3 乗根，すなわち方程式 $x^3=1$ の解は

$$x^3-1=0 \qquad (x-1)(x^2+x+1)=0 \qquad x=1,\ \frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2},\ \frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$$

の 3 個である。

n を自然数とするとき，方程式 $z^n=1$ を満たす複素数 z を，1 の「　　　　」という。

1 の 3 乗根を，ド・モアブルの定理を用いて求める。

$z^3=1$ より $|z^3|=1$ 　　 $|z|^3=1$ 　　 $|z|>0$ より $|z|=1$

よって，$z=\cos\theta+i\sin\theta$ とおくと，ド・モアブルの定理より

$$z^3=\cos\ \ \theta+i\sin\ \ \theta$$

$z^3=1$ より $\cos 3\theta+i\sin 3\theta=\cos 0+i\sin 0$

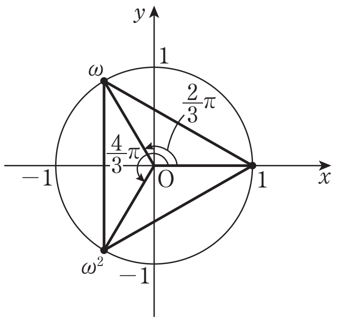
両辺の偏角を比較して $3\theta=0$ 　　　　　（k は整数）

よって $\theta=\frac{2}{\ }\pi\times k$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲では $k=0,\ 1,\ 2$ であるから，$\theta=0,\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$

したがって $z=1,\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

1 の 3 乗根 1，$\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$\omega^2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ を複素数平面上に図示すると，右図のように，単位円に内接する正三角形の 3 つの頂点となっている。



一般に，1 の n 乗根について，次のことが成り立つ。

> **1 の n 乗根**
>
> 自然数 n に対して，1 の n 乗根，すなわち $z^n=1$ の解は
>
> $$z_k=\cos\left(\frac{2\pi}{n}\times k\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\times k\right)\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)\ の\ n\ 個$$

[MEMO]

2 次の方程式を解け。

(1) $z^6=1$

(2) $z^4=-2-2\sqrt{3}\,i$

Point Pickup

方程式 $z^n=\alpha$ の解

方程式の解を $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ ($r>0$, $0\leqq\theta<2\pi$) とおき，ド・モアブルの定理

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

を用いて，$z^n=\alpha$ の左辺および右辺を極形式で表し，両辺の絶対値および偏角を比較する。

第 7 講 PART2 確認問題

1 方程式 $z^4=-1$ を解く。

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ とおくと，

$$z^4=r^4\left(\cos\boxed{ア}\theta+i\sin\boxed{ア}\theta\right)$$

また，$-1=\cos\boxed{イ}+i\sin\boxed{イ}$

よって，$z^4=-1$ は次のように表される。

$$r^4\left(\cos\boxed{ア}\theta+i\sin\boxed{ア}\theta\right)=\cos\boxed{イ}+i\sin\boxed{イ}$$

この等式から r，θ を求めると，

$$r=\boxed{ウ},\quad \theta=\boxed{エ}$$

よって，$z^4=-1$ の解は，

$$z=\boxed{オ}\quad（複号任意）$$

$\boxed{イ}$，$\boxed{エ}$，$\boxed{オ}$ は，下の①～④のうちから選べ。

[$\boxed{イ}$ の選択肢]

① 0　② $\dfrac{\pi}{2}$　③ π　④ $\dfrac{3}{2}\pi$

[$\boxed{エ}$ の選択肢]

① $0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$　② $\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{4}\pi,\ \pi$

③ $\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi$　④ $\dfrac{\pi}{8},\ \dfrac{3}{8}\pi,\ \dfrac{5}{8}\pi,\ \dfrac{7}{8}\pi$

[$\boxed{オ}$ の選択肢]

① $\pm1\pm i$　② $\pm\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{1}{2}i$

③ $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$　④ $\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{2}\,i$

2 方程式 $z^2=-2+2\sqrt{3}\,i$ を解く。

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ とおくと，

$$z^2=r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)$$

また，$-2+2\sqrt{3}\,i=$ [カ] $\left(\cos\text{[キ]}+i\sin\text{[キ]}\right)$

よって，$z^2=-2+2\sqrt{3}\,i$ は次のように表される。

$$r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)=\text{[カ]}\left(\cos\text{[キ]}+i\sin\text{[キ]}\right)$$

この等式から r，θ を求めると，

$r=$ [ク]，$\theta=$ [ケ]

よって，$z^2=-2+2\sqrt{3}\,i$ の解は，

$z=$ [コ]

[キ]，[ケ]，[コ] は，下の①～④のうちから選べ。

[[キ] の選択肢]

① $\dfrac{\pi}{3}$　② $\dfrac{2}{3}\pi$　③ $\dfrac{4}{3}\pi$　④ $\dfrac{5}{3}\pi$

[[ケ] の選択肢]

① $\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{2}{3}\pi$　② $\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{4}{3}\pi$

③ $\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5}{6}\pi$　④ $\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{7}{6}\pi$

[[コ] の選択肢]

① $\pm(1+i)$　② $\pm(\sqrt{3}+i)$

③ $\pm(1+\sqrt{3}\,i)$　④ $\pm(1-\sqrt{3}\,i)$

【MEMO】

PART2 1 の n 乗根

2 次の方程式を解け。

(1) $z^6=1$　　(2) $z^4=-2-2\sqrt{3}\,i$

[解答]

(1) 解を $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ ($r>0$, $0\leqq\theta<2\pi$) ……① とおくと,

$$z^6=r^6(\cos 6\theta+i\sin 6\theta)$$

また $1=\cos 0+i\sin 0$

よって，方程式 $z^6=1$ は極形式を用いて次のように表される。

$$r^6(\cos 6\theta+i\sin 6\theta)=\cos 0+i\sin 0$$

両辺の絶対値と偏角を比較して

$$r^6=1,\ 6\theta=0+2\pi\times k\ (k\text{ は整数})$$

$$r>0\text{ より } r=1,\ \theta=\frac{\pi}{3}\times k$$

$0\leqq\theta<2\pi$ より $k=0$, 1, 2, 3, 4, 5 であるから，$\theta=0$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2}{3}\pi$, π, $\frac{4}{3}\pi$, $\frac{5}{3}\pi$

①より，求める解は 1, $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, -1, $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$\left(\pm 1,\ \pm\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\ (\text{複号任意})\right)$$

(2) 解を $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ ($r>0$, $0\leqq\theta<2\pi$) ……① とおくと,

$$z^4=r^4(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)$$

また $-2-2\sqrt{3}\,i=4\left(\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi\right)$

よって，方程式 $z^4=-2-2\sqrt{3}\,i$ は極形式を用いて次のように表される。

$$r^4(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)=4\left(\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi\right)$$

両辺の絶対値と偏角を比較して

$$r^4=4,\ 4\theta=\frac{4}{3}\pi+2\pi\times k\ (k\text{ は整数})$$

$$r>0\text{ より } r=\sqrt{2},\ \theta=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\times k$$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より $k=0$，1，2，3 であるから，$\theta = \dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{5}{6}\pi$，$\dfrac{4}{3}\pi$，$\dfrac{11}{6}\pi$

①より，求める解は $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{6}}{2}i$，$-\dfrac{\sqrt{6}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$，$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{6}}{2}i$，$\dfrac{\sqrt{6}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

$$\left(\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i\right),\ \pm\left(\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right)$$

第 7 講 PART2 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：4，イ：③，ウ：1，エ：③，オ：③

[解説]

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ ……①

とおくと，

$$\boldsymbol{z^4=r^4(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)}$$ [A]

また，$-1=\boldsymbol{\cos\pi+i\sin\pi}$

よって，$z^4=-1$ は次のように表される。

$$r^4(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)=\cos\pi+i\sin\pi$$

両辺の絶対値と偏角を比較すると，

$$r^4=1,\ 4\theta=\pi+2\pi\times k\ (k\text{ は整数})$$ [B]

$r>0$ より，$\boldsymbol{r=1}$，$\theta=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}\times k$

$0\leqq\theta<2\pi$ より，$k=0,\ 1,\ 2,\ 3$ であるから，

$$\boldsymbol{\theta=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi}$$

①より，求める解は，

$$\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

すなわち，$\boldsymbol{z=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}i}$ （複号任意）

> [A] ド・モアブルの定理
> n が整数のとき，
> $(\cos\theta+i\sin\theta)^n$
> $=\cos n\theta+i\sin n\theta$

> [B] 4θ がとり得る値は 1 つではないので，文字 k を使った式で表す。

2

[正解] カ：4，キ：②，ク：2，ケ：②，コ：③

[解説]

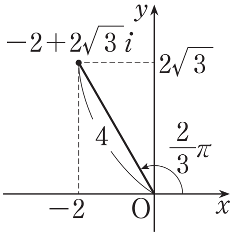
$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ ……①

とおくと，

$$z^2=r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)$$ [C]

また，

$$-2+2\sqrt{3}\,i$$
$$=4\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$$



よって，$z^2=-2+2\sqrt{3}\,i$ は次のように表される。

$$r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)=4\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$$

両辺の絶対値と偏角を比較すると，

$$r^2=4,\ 2\theta=\frac{2}{3}\pi+2\pi\times k\ (k \text{は整数})$$ [D]

$r>0$ より，$\boldsymbol{r=2}$，$\theta=\dfrac{\pi}{3}+\pi\times k$

$0\leqq\theta<2\pi$ より，$k=0$，1 であるから，

$$\boldsymbol{\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{4}{3}\pi}$$

①より，求める解は，

$$2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=1+\sqrt{3}\,i$$

$$2\left(\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi\right)=-1-\sqrt{3}\,i$$

すなわち，$\boldsymbol{z=\pm(1+\sqrt{3}\,i)}$

[C] ド・モアブルの定理
n が整数のとき，
$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

[D] 2θ がとり得る値は 1 つではないので，文字 k を使った式で表す。